令和４年　大学入試共通テスト（数学Ⅰ・数学Ａ）の略解と解説

一昨日　冗　著

注意：　答えは，赤文字 or 赤数字で示す。

第１問.　［１］実数 $a,\ b,\ c$ が，次の２式を満たしているときの計算問題。

$$a+b+c=1 \qquad \cdots \quad ①$$
$$a^2+b^2+c^2=13 \qquad \cdots \quad ②$$

(1) 解答）①,② と　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=1$　より

$$2(ab+bc+ca)=1-13=-12 \qquad \therefore \quad ab+bc+ca \ = -6. \qquad \cdots \quad ③$$

また，② と ③ より

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-2(ab+bc+ca)=2\cdot 13-2\cdot(-6)=26+12=38.$$

(2) $a-b=2\sqrt{5}$ のとき，$(a-b)(b-c)(c-a)$ の値を求めよ。

解答）$b-c=x,\ c-a=y$ とおくと，$x+y=b-a=-2\sqrt{5}.$ 　$\cdots$ ④

また，(1) の計算より　$x^2+y^2=(b-c)^2+(c-a)^2=38-(a-b)^2=38-(2\sqrt{5})^2=18.$

これと，④より

$$x^2+2xy+y^2=20 \quad \rightarrow \quad xy=1 \quad \text{だから，} \quad (a-b)(b-c)(c-a)=2\sqrt{5}\,xy=2\sqrt{5}.$$

解説）これはよくお目にかかる計算ですね。(1) はレベル４，(2) はレベル 3.5 ですね。皆ができなくちゃならない問題です。

［２］ キャンプ場 A と近くの山の山頂 B を含む断面図が図 1 に与えられている。この図では，角度 θ の値は 16 °であった。

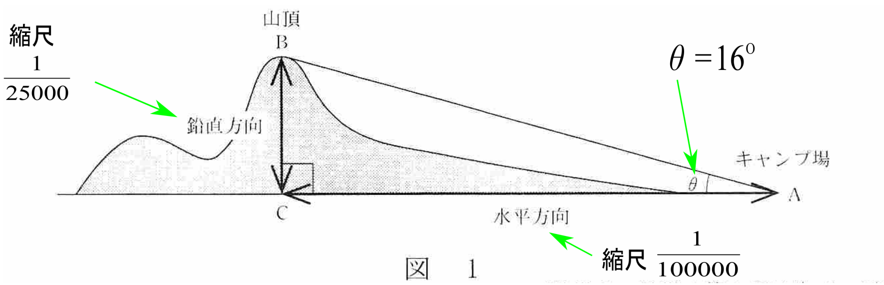
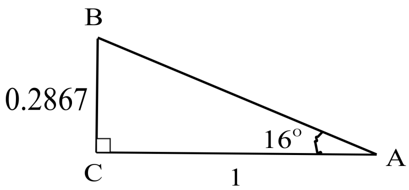
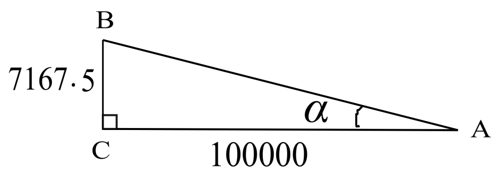


図　1



図(a)



図(b)　実際の比率

また，図 1 では，水平方向の縮尺が $\dfrac{1}{100000}$，鉛直方向の縮尺は $\dfrac{1}{25000}$ であった。この図から，実際のキャンプ場の地点 A から山頂 B を見上げる角 $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを考える。

解答）地図上での AC と CB の長さの比は　1 : 0.2867　である（表の tan 16° の値から分る）。地図の縮尺を考えると，実際の AC と CB の距離の比は，0.2867 × 25000=7167.5　より，100000 : 7167.5　であることが分る（上図 (a),(b) を参照せよ）。従って，

$$\tan\angle\mathrm{BAC} = \frac{7167.5}{100000} = 0.071675 = 0.072.$$

正接 (タンジェント）の値が 0.072 のとき，∠BAC　の大きさは，表から 4°より大きく　5°より小さいことが分かる。

解説）問題文をしっかり読んで，内容を理解することが第 1 です。地図アプリから得られた断面図の縮尺が重要です。水平方向の縮尺は 100000 分の 1 なので，地図上の AC の長さが 1cm ならば，実際の距離は 100000cm（1000m）です。鉛直方向も同様に 25000 倍して実際の距離を計算します。即ち，縮尺の意味が分っていればやさしい問題です。難易度は表も使うので，レベル３ですね。

［３］ 外接円の半径が 3 である　△ABC　を考える。点 A から直線 BC に引いた垂線と直線 BC との交点を D とする。
(1) AB=5, AC=4 とする。
解答）∠ABC= θ　として，$\sin\theta$　を求める問題です。図 2(a) のように円 O の中心から辺 AC 上に垂線を引き，AC との交点を M とします（M は辺 AC の中点であることに注意せよ）。このとき，∠ABC= ∠AOM= θ　だから，

$$\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OA}} = \frac{2}{3}.$$

このとき，$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{AD}}{5} = \dfrac{2}{3}$　だから，AD= $\dfrac{10}{3}$.

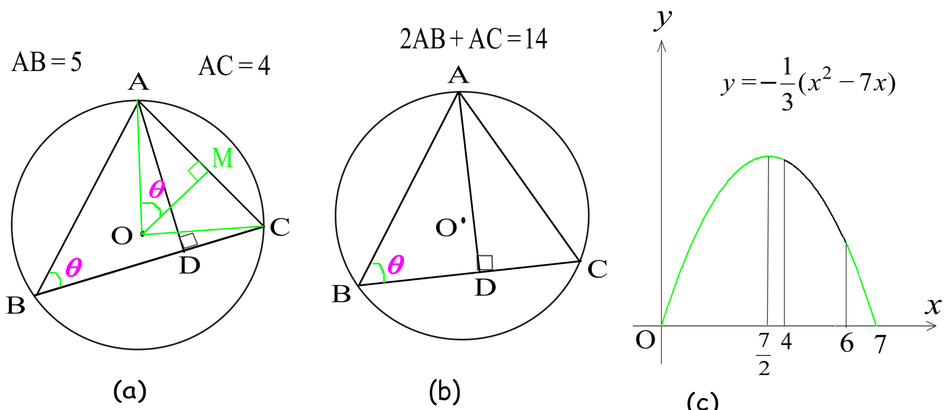


図2

(2) 2 辺 AB，AC の長さの間に　2AB+AC=14　の関係があるとき，以下の 答えを求めよ。
解答）AB の長さは，最大で円の直径なので 6 である。最小の値は AC が 6 のときなので，上の条件より　AB=4　である。従って，AB の長さのとり得る値の範囲は $4 \leqq \mathrm{AB} \leqq 6$.

AD の長さを AB を用いて表したい。再び，∠ABC = θ　とおくと（図 2(b) 参照），

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BA}} \quad \cdots ①, \qquad \frac{\mathrm{AC}}{\sin\theta} = 6 \quad \cdots ② \qquad \text{（正弦定理より）}$$

より　$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\sin\theta = \mathrm{AB} \times \dfrac{\mathrm{AC}}{6} = \mathrm{AB} \times \dfrac{14 - 2\mathrm{AB}}{6} = -\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}^2 + \dfrac{7}{3}\mathrm{AB}. \quad \cdots ③$

式③ は，x =AB, y =AD とおくと，　$y = -\dfrac{1}{3}(x^2 - 7x) = -\dfrac{1}{3}\left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2 + \dfrac{49}{12}$　と表される。

図 2(c) より， $4 \leqq x \leqq 6$ の範囲での y の最大値は 4 である（$x=4$ のとき）。

解説）(1) は，中学の知識と三角比（特に sin ）の定義が分っていれば解けるでしょう。レベル 3 ですね。(2) は，正弦定理などを使った計算が少しあるので，うまくやらないと時間がかかってしまうかな。レベル 2.5 ですね。レベル 2.5 とは，ごく普通の問題という意味です。教科書のやや難しい例題程度かな。レベル 2.5 は全員解いて欲しいね。

第２問． ［１］p, q を実数とする。花子さんと太郎さんは，次の２つの２次方程式について考えている。

$$x^2+px+q=0 \quad \cdots \quad ①$$
$$x^2+qx+p=0 \quad \cdots \quad ②$$

① または ②を満たす実数 x の個数を n とおく。

解答）(1) $p=4,\ q=-4$ のとき，① は $x^2+4x-4=0$ で，解は $x=-2\pm\sqrt{8}$,
② は $x^2-4x+4=(x-2)^2=0$ だから，解は $x=2$ である。
従って，$n=3$ である。
また，$p=1,\ q=-2$ のとき，① は $x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore \quad x=1,\ -2.$
② は，$x^2-2x+1=(x-1)^2=0 \quad \therefore \quad x=1.$ となるので，$n=2$ である。

(2) $p=-6$ のとき，$n=3$ になる場合を考える。

（問題解決のための，花子と太郎の会話がある）…これらを参考にして解法をつくる。

解答）まず，式① の左辺がが完全平方になるとき，すなわち $q=9$ のとき，① の解は $x=3.$

② は $x^2+9x-6=0$ だから解は $x=\dfrac{-9\pm\sqrt{105}}{2}$, 従って，解の個数は 3。

次に① と ② が共通の解 α を持つ場合を考える。このとき，

$$\alpha^2-6\alpha+q=0 \quad \cdots \quad ⑤, \qquad \alpha^2+q\alpha-6=0 \quad \cdots \quad ⑥$$

が成り立つので，⑥-⑤ より，$(q+6)\alpha-(6+q)=0 \quad \rightarrow \quad (q+6)(\alpha-1)=0$ を得る。
$q=-6$ のとき，同じ方程式になってしまい，題意に矛盾する。
$\alpha=1$ のとき，$q=5$ となり，

①は，$x^2-6x+5=0 \quad \rightarrow \quad (x-5)(x-1)=0 \quad \therefore \quad x=1,\,5.$
②は，$x^2+5x-6=0 \quad \rightarrow \quad (x+6)(x-1)=0 \quad \therefore \quad x=1,-6.$

解は 3 つで，題意を満たす。以上より $n=3$ となる q の値は $q=5,\,9$ である。

(3) 花子さんと太郎さんは，グラフ表示ソフトを用いて，①,②の左辺を y とおいた 2 次関数 $y=x^2+px+q$ と $y=x^2+qx+p$ のグラフの動きを考えている。
$p=-6$ に固定したまま，q の値だけを変化させる。

$$y=x^2-6x+q \quad \cdots \quad ③$$
$$y=x^2+qx-6 \quad \cdots \quad ④$$

の二つのグラフについて，$q=1$ のときのグラフを点線で，q の値を 1 から増加させたときのグラフを実戦でそれぞれ表す。図 3 の中から答を選びなさい。

解答）③ のグラフについては，例えば，

$q=1$ のとき，$y=x^2-6x+1=(x-3)^2-8$
$q=3$ のとき，$y=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$

だから，放物線の軸は同じで，$q=3$ のグラフが上部にあるので，q を増加させたときのグラフの移動の様子は⑥の場合である。

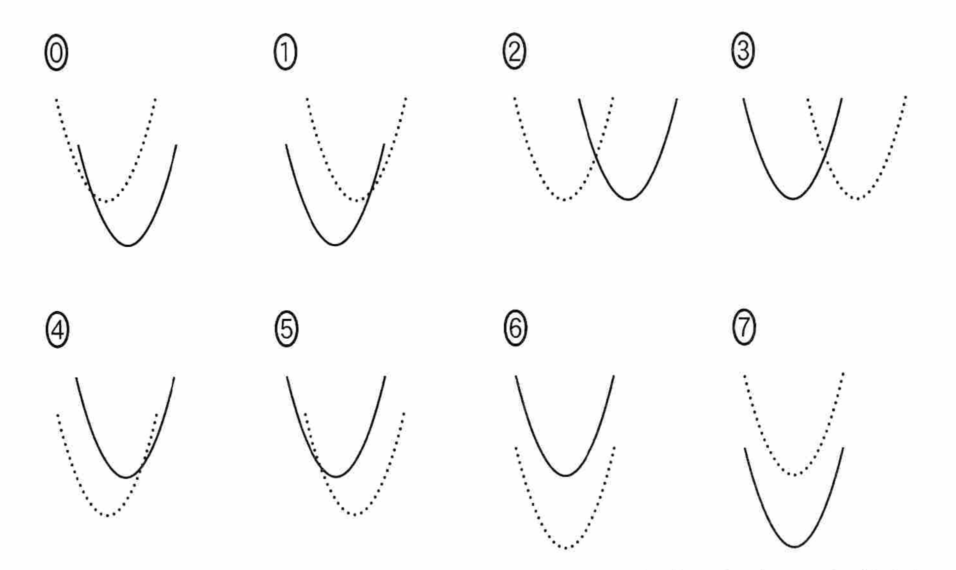


図3

④ のグラフについては，例えば，

$$q=1 \text{ のとき，} \quad y=x^2+x-6=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$$

$$q=4 \text{ のとき，} \quad y=x^2+4x-6=(x+2)^2-10$$

だから，q が増加したとき軸は左にずれて，頂点は下方に移動する。以上より，④ のグラフの移動の様子を示すと① となる。

(4) $5<q<9$ とする。全体集合 U を実数全体の集合とし，U の部部分集合 A, B を

$$A=\{\,x \mid x^2-6x+q<0\,\}$$
$$B=\{\,x \mid x^2+qx-6<0\,\}$$

とする。U の部分集合 X に対し，X の補集合を $\overline{X}$ と表す。このとき，次のことが成り立つ。

解答）$q=5,\ 9$ のときの，③ と ④ のグラは次の (a) と (b) ようになる。

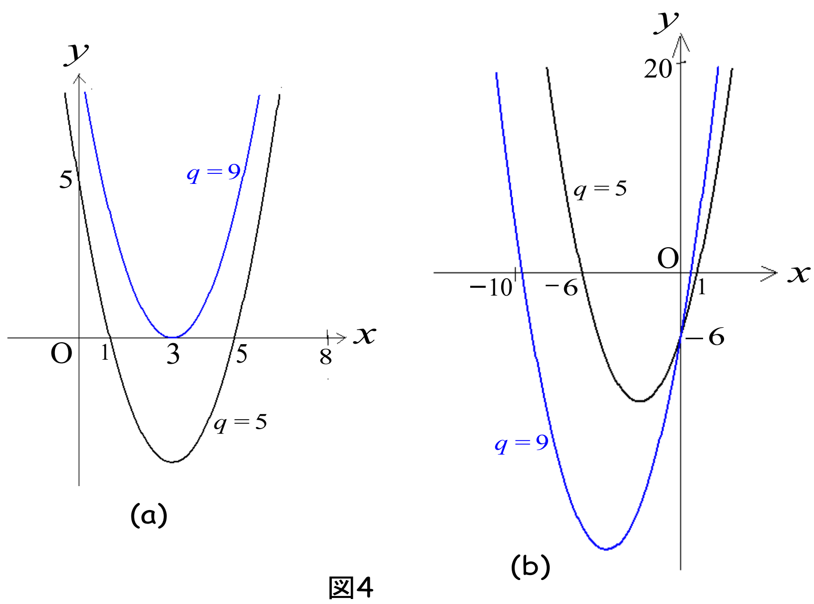


図4

この図から集合 A と B は，共通部分がないことが分かる。また，$x \in B$ ならば，$x \in \overline{A}$ であり，$x \in \overline{A}$ ならば，$x \in B$ または $x \in \overline{B}$ である。従って，次のことが分る：

・ $x \in A$ は，$x \in B$ であるための必要条件でも十分条件でもない。
・ $x \in B$ は，$x \in \overline{A}$ であるための十分条件であるが，必要条件ではない。

解説）（1） は，方程式を解けば解の個数が分るのでレベル 3.5 だね。(2) は，ヒントはあるのですが，２つの場合があるということが分らないといけません。共通解の場合は，確かめ算なども必要なので，ちょっと時間がかかるかな。レベル 2.5 ですね。(3) は 2 次関数のグラフの問題で，パラメーター q を動かしたとき，グラフがどのように動くかを問うてます。2 次関数の標準形が書ければいいので，レベル 2.5 ですね。(4) は，集合 A, B の位置関係を正確に把握しないと答えられませんね。図 4 のようなグラフがさっと描ければ，いいのですが，これはちょっと難しいかな。レベル 2 ですね。2 次関数全般にわたる問題で，難かしくもなく，入試問題としてはいい問題ですね。

［２］日本国外における日本語教育の状況を調べたデータがある。調べた項目は，各国における

教育機関数，　教員数，　学習者数

である。2018 年度において学習者数が 5000 人以上の国と地域（以下，国）は 29 か国であった。これら 29 か国について 2009 年度と 2018 年度のデータが得られている。

(1) 各国において，学習者数を教員数で割ることにより，国ごとの「教員 1 人あたりの学習者数」を算出することができる。下の図 1 と図 2 は，2009 年度および 2018 年度における「教員 1 人あたりの学習者数」のヒストグラムである。これら二つのヒストグラムから，9 年間の変化に関して後のことが読み取れる。なお，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。以下の文が正しくなるように正解を 4 つの中から選べ。

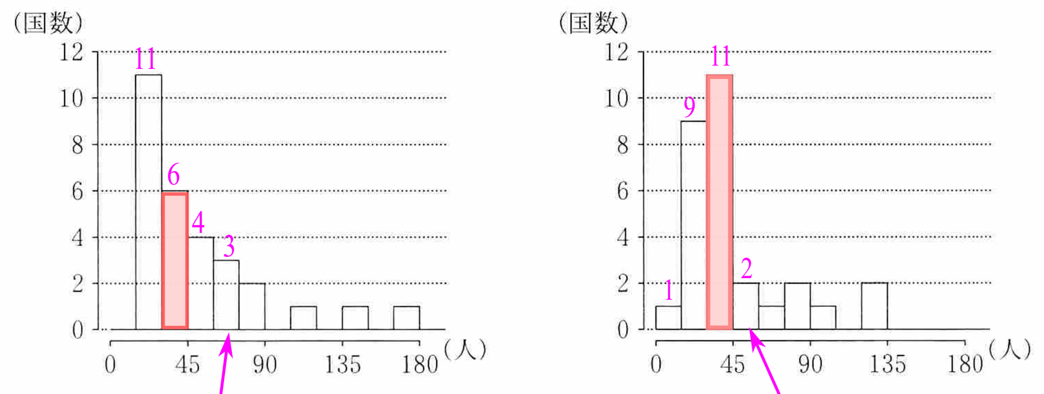


図 1　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

図 2　2018 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

解答）階級の幅は 15 であることにまず注意しなさい。そして，29 か国のデータだから，小さい順に並べたとき，中央値は 15 番目のデータ，第 1 四分位数は 7 番目と 8 番目のデータの平均，第 3 四分位数は 22 番目と 23 番目ののデータの平均である。また，範囲とは，データの最大値と最小値の差であることにも注意せよ。

・2009 年度と 2018 年度の中央値が含まれる階級の階級値を比較すると，両者は等しい。
（∵　図 1 と図 2 の 15 番目のデータは，共に $30 \leqq x < 45$ の階級 (ピンクの部分) にある。）
・2009 年度と 2018 年度の第 1 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，両者は等しい。
（∵　図 1 と図 2 の第 1 四分位数は，共に $15 \leqq x < 30$ の階級にある。）

・2009 年度と 2018 年度の第 3 四分位数が含まれる階級の階級値を比較すると，2018 年度の方が小さい。（∵　第 3 四分位数は，　図 1 では $60 \leqq x < 75$ ，図 2 では $45 \leqq x < 60$ の階級にある。）
・2009 年度と 2018 年度の範囲を比較すると，2018 年度の方が小さい。（∵　前者は約 165，後者は約 135 だから。）
・2009 年度と 2018 年度の四分位範囲を比較すると，これら二つのヒストグラムからだけでは両者の大小を判断できない。（∵　両者とも第 1 四分位数，第 3 四分位数が不明で計算できない。どちらも大きくなる可能性がある）

(2) 各国において，学習者数を教育機関数で割ることにより，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」も算出した。下の図 3 は，2009 年度における「教育機関 1 機関あたりの学習者数」の箱ひげ図である

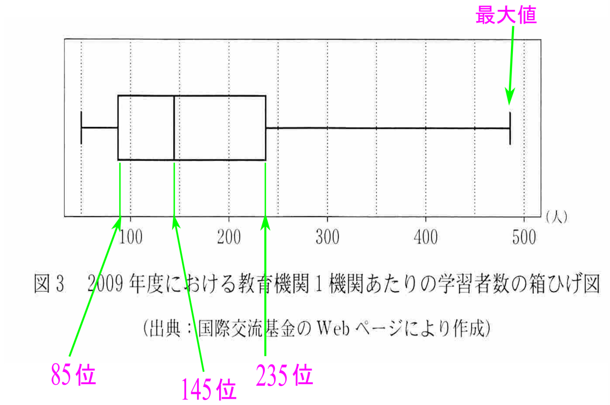


図 3　2009 年度における教育機関 1 機関あたりの学習者数の箱ひげ図

（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

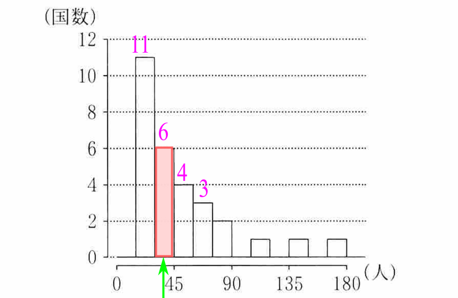
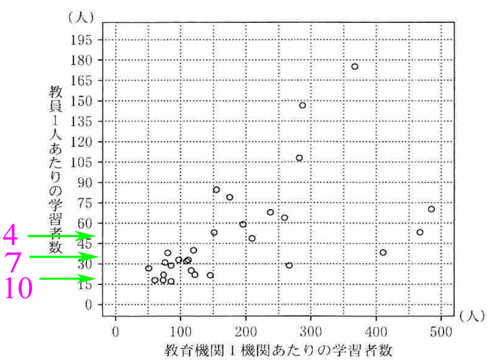


図 4　2009 年度における教員 1 人あたりの学習者数のヒストグラム

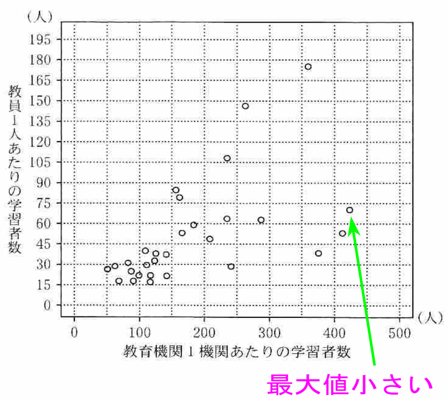
（出典：国際交流基金の Web ページにより作成）

2009 年度について，「教育機関 1 機関あたりの学習者数」（横軸）と「教員 1 人あたりの学習者数」（縦軸）の散布図で，最も適当なものを下の 4 つのものから選べ。

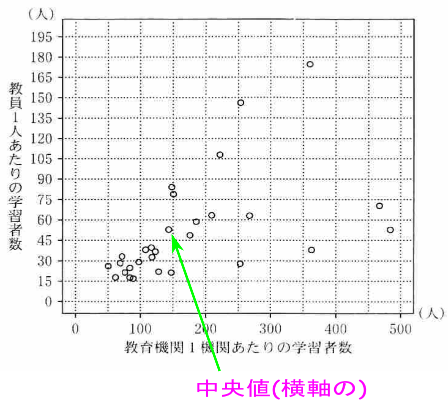
⓪



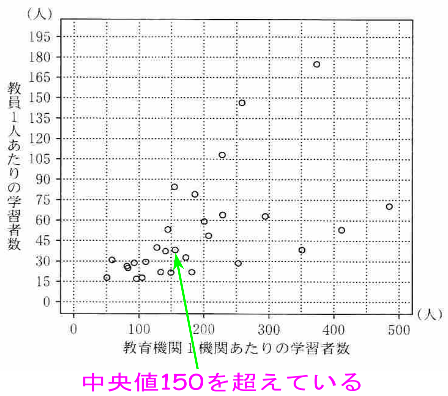
①



②



③



解答）まず箱ひげ図について，第１四分位数，中央値，第３四分位数の位置を大まかにつかんで置かなければならないでしょう。これら３つの値は図３からそれぞれ，85, 145, 235 位であることが読み取れる。図３，図４には必要と思われる数値や重要な事実ををカラーで記入した。受験生も，必要な数値や重要なことがらなどは図や表に記入しながら解答を考えるのがいいですね。

⓪番の図は，縦軸の度数の最初の３つが　10, 7, 4　なので，不適 (ダメ) だね（数えるのけっこう大変だね）。
①番の図は，横軸の最大値が小さすぎるのでダメだね。
②番の図は，まずい所は見当たらないね。
③番の図は，横軸の中央値が 150 を超えているのでダメだね（これも，見つけるの難しいね）。

以上より，答えは ② です。

(3) 各国における 2018 年度の学習者数を 100 としたときの 2009 年度の学習者数 S，および，各国における 2018 年度の教員数を 100 としたときの 2009 年度の教員数 T を算出した。

例えば，学習者数について説明すると，ある国において，2009 年度が 44272 人，2018 年度が 174521 人であった場合，2009 年度の学習者数 S は　$\dfrac{44272}{174521}$　より，25.4 と算出される。

表１は S と T について，平均値，標準偏差および共分散を計算したものである。ただし，S と T の共分散は，S の偏差と T の偏差の積の平均値である。表１の数値が四捨五入していない正確な値であるとして，S と T の相関係数を求めよ。

表１．　平均値，標準偏差 および共分散

S の平均値	T の平均値	S の標準偏差	T の標準偏差	S と T の共分散
81.8	72.9	39.3	29.9	735.3

解答）相関係数 r は　$-1 \leqq r \leqq 1$　の範囲にあり，散布図の直線的度合いを表す１つの量である。２つの変量　x, y　からなる n 個のデータ　(x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots$,(x_n, y_n)　が集合として，直線的か否かを示す数値です。 $\bar{x}$, $\bar{y}$　を２つの変量のデータの平均として，次のように定義されている。

x の標準偏差：　$s_x = \sqrt{\dfrac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \ \cdots \ + (x_n-\bar{x})^2\}}$

y の標準偏差：　$s_y = \sqrt{\dfrac{1}{n}\{(y_1-\bar{y})^2 + (y_2-\bar{y})^2 + \ \cdots \ + (y_n-\bar{y})^2\}}$

x と y の共分散：　$s_{xy} = \dfrac{1}{n}\{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y}) + (x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y}) + \ \cdots \ + (x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})\}$

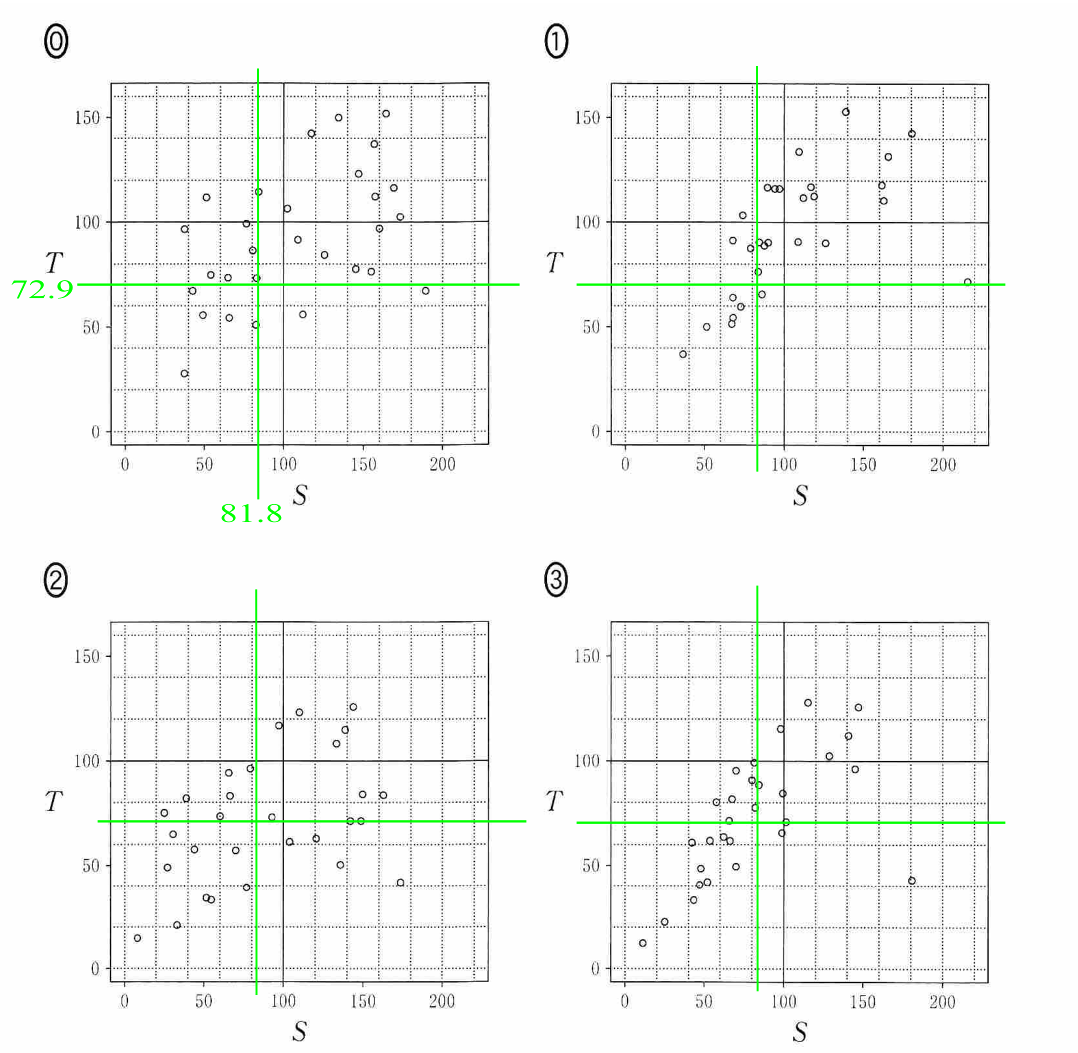
として

$$
\begin{aligned}
r &= \frac{(x_1-\bar{x})(y_1-\bar{y}) + (x_2-\bar{x})(y_2-\bar{y}) + \ \cdots \ + (x_n-\bar{x})(y_n-\bar{y})}{n\, s_x s_y} \\
&= \frac{s_{xy}}{s_x s_y}
\end{aligned}
$$

である。この式を用いて計算すると

$$r = \frac{735.3}{39.3 \times 29.9} = 0.625 = 0.63 \quad \text{となる。}$$

(4) 表 1 と (3) で求めた相関係数を参考にして，S（横軸）と T（縦軸）の散布図として最も適当なものを次の 4 つから選べ。なお，これらの散布図には，完全に重なっている点はない。



解答）散布図の中に，平均値の位置に黄緑の線を引いた。この 2 つの直線の交点は，平均値を表す点で，2 変量データの重心の位置を表すと考えてよい。このことより，最初の 2 つ（⓪ と ①）は，平均の点が重心の位置からかなり離れているので明らかに良くない図である（不適切)。

② と ③ を見ると，② はけっこうばらつきが大きいので，相関係数は 0.2 から 0.3 付近の値と考えられる。③ のデータの集合は，やや直線的になっているので，相関係数は 0.6 前後であろうと思われる。従って，答えは ③ である。

解説）中央値，第 1・第 3 四分位数，箱ひげ図などは中学校で習った事柄です。正確に覚えていないと，間違えますよ。相関係数の公式も覚えるのはなかなか大変ですよね。

(1) の最初の 4 つは，すぐ答えられなくてはいけませんね。レベル 3 ですね。最後の 1 つはちょっと難しいね，レベル 2 ですかね。

(2) は，箱ひげ図と，ヒストグラムそして散布図の 3 つをながめながら，間違い探しをしなければなりませんね。間違いを見つけるのはけっこう大変ですね。難しいのでレベル 1.5 位かな。

(3) は公式を使って計算するだけなのですが，3 ケタどうしの掛け算と 3 ケタと 6 ケタの割り算が大変ですね（馬鹿みたいな問題；表 1 の数値が良くない)。即ち，手計算に時間がかかります。やさしい問題なのだが，手計算で間違いやすい。レベル 2 かな。

(4) は，縦軸，横軸の平均の位置に直線を引くことで，点全体の位置関係が把握できます。直線が

引ければ簡単ですね。しかし，相関係数が間違っていると正しい答えが選べませんね。
レベル 2.5 ですね。問題全体としては，データ整理の基本を問うている，まあまあいい問題ですね。

第３問. 複数人がそれぞれプレゼントを一つずつ持ちより，交換会を開く。ただし，プレゼントはすべて異なるとする。プレゼントの交換は次の手順で行う。

−−−−−−−−−【手順】−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

外見が同じ袋を人数分用意し，各袋にプレゼントを一つずつ入れたうえで，各参加者に袋を一つずつでたらめに配る。各参加者は配られた袋の中のプレゼントを受け取る。

−−−

交換の結果，1 人でも自分の持参したプレゼントを受け取った場合は，交換をやり直す。そして，全員が自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったところで交換会を終了する。

(1) 2 人または 3 人で交換会を開く場合を考える。次の $\boxed{}$ にあてはまる答えを求めよ。

解答) 人を A,B,C, $\cdots$ で表し，彼らが持ってきたプレゼントを $a, b, c, \cdots$ で表すことにする。また，プレゼントの組を $(c, b, a, \cdots)$ と書いたとき，A,B,C, $\cdots$ の受け取るプレゼントがそれぞれ $c, b, a, \cdots$ であるということを示すものとする。

(i) 2 人で交換会を開く場合，起こり得る事象は (a, b), (b, a) の 2 通りである。従って，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は，(b, a) の 1 通りある。また，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{1}{2}$ である。

(ii) 3 人で交換会を開く場合，起こり得る全ての事象をかくと，

(a, b, c)，(a, c, b)，(b, a, c)，(b, c, a)，(c, a, b)，(c, b, a)

の 6 通りある。4 番目と 5 番目が自分の持ってきたプレゼントを受け取らない場合なので，1 回目の交換で交換会が終了するプレゼントの受け取り方は 2 通りある。従って，1 回目の交換で交換会が終了する確率は $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ である。

(iii) 3 人で交換会を開く場合，4 回以下の交換で交換会が終了する確率を求めたい。(ii) で使った事象を　$D = \{\ (\text{b, c, a})$　または　$(\text{c, a, b})\ \}$　とおく。
4 回以下の交換で交換会が終了するのは，次の 4 つの場合（1 回で終わるか 2 回で終わるか 3 回で終わるか 4 回で終わるか）である。すなわち，

D　または　$\overline{D} \cap D$　または　$\overline{D} \cap \overline{D} \cap D$　または　$\overline{D} \cap \overline{D} \cap \overline{D} \cap D.$

$P(D) = \dfrac{1}{3}$,　$P(\overline{D}) = \dfrac{2}{3}$　だから，求める確率は

$$\begin{aligned} P &= P(D) + P(\overline{D})P(D) + P(\overline{D})\,P(\overline{D})P(D) + P(\overline{D})\,P(\overline{D})\,P(\overline{D})P(D) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} \\ &= \frac{65}{81}. \end{aligned}$$

(2) 4 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率を次の**構想**に基づいて求めてみよう。

−−−−−−−【構想】−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−−

1 回目の交換で交換会が終了しないプレゼントの受け取り方の総数を求める。そのために，自分の持参したプレゼントを受け取る人数によって場合分けをする。

−−−

次の文章の $\boxed{}$ にあてはまる答えを求めよ。

解答）プレゼント a, b, c, d の作る順列は　$4! = 24$　通りあることにまず注意しなさい。
1 回目の交換で，4 人のうち，ちょうど 1 人が自分の持参したプレゼントを受け取る場合の数を考える。A が自分の持参したプレゼント a を受け取るとすると，他の 3 人は自分のプレゼントを受け取らないので，その場合の数は 2 通りである（(1) の (ii) より分る)。B,C,D についても同じことが言えるので，$\boxed{\text{サ}}$ の答えは $2 \times 4 = 8$ 通りである。

ちょうど 2 人が自分のプレゼントを受け取る場合を考える。A と B が自分のプレゼントを受け取るとすると，C,D の受け取り方は 1 通りしかない。4 人から 2 人を選ぶ選び方は　${}_4C_2 = 6$　通りなので，$\boxed{\text{シ}}$ の答えは $1 \times 6 = 6$ 通りである。

3 人が自分のプレゼントを受け取る場合は，4 人とも自分のプレゼントを受け取ることと同じになるので，1 通りである。以上より，1 回目の交換で交換会が終了しない受け取り方の総数は
　$8 + 6 + 1 = 15$　である。
従って，1 回目の交換で交換会が終了する確率は　$\dfrac{24 - 15}{24} = \dfrac{9}{24} = \dfrac{3}{8}$　である。

(3) 5 人で交換会を開く場合，1 回目の交換で交換会が終了する確率を求めよ。

解答）プレゼント a, b, c, d, e の作る順列は　$5! = 120$　通りあることに注意しなさい。
A,B,C,D,E の 5 人のうち 1 人が自分のプレゼントを受け取り，他の 4 人は自分のプレゼントを受け取らない場合の数は
　${}_5C_1 \times 9 = 45.$　(9 は，4 人が自分のプレゼントを受け取らない場合の数；上の (2) 参照）
同様に，2 人が自分のプレゼントを受け取り，3 人が自分のプレゼントを受け取らない場合の数は　${}_5C_2 \times 2 = 20.$　また，3 人が自分のプレゼントを受け取り，2 人が自分のプレゼントを受け取らない場合の数は　${}_5C_3 \times 1 = 10,$　最後に 4 人が自分のプレゼントを受け取る（5 人全部が自分のプレゼントを受け取ることと同じ）場合の数は 1 なので，全部たすと　$45 + 20 + 10 + 1 = 76.$
従って，1 回目の交換で交換会が終了する確率は
$$\frac{120 - 76}{120} = \frac{44}{120} = \frac{11}{30}.$$

(4) A,B,C,D,E の 5 人が交換会を開く。1 回目の交換で A,B,C,D がそれぞれ自分以外の人の持参したプレゼントを受け取ったとき，その回で交換会が終了する条件付き確率を求めよ。

解答）E が何を受け取るかによって，A,B,C,D が受け取るプレゼントは違ってきます。それを表にして見やすくすると

表 2.　5 人のプレゼント

場合	A, B, C, D	E	注意
(i)	b,c,d,e の順列	a	b,c,d,e の順列は 24 通り
(ii)	a,c,d,e の順列	b	a,c,d,e の順列は 24 通り
(iii)	a,b,d,e の順列	c	a,b,d,e の順列は 24 通り
(iv)	a,b,c,e の順列	d	a,b,c,e の順列は 24 通り
(v)	a,b,c,d の順列	e	題意を満たすものは 9 通り

となります。A,B,C,D 4 人の受け取るプレゼントが，全員自分が持ってきたもの以外になる場合の数が分ればよい。(v) の場合は，(2) で 9 通りが分っている。

(i) の場合から順番に考えよう。考え方は，(2) の構想と同じ方法でやる。A,B,C,D のうち 1 人が自分のプレゼントを受け取る場合は，次の表で示す様に，9 通りである。

表３． １人が自分のプレゼントを受け取る

A, B, C, D	A, B, C, D	A, B, C, D
(c, b, d, e)	(b, d, c, e)	(b, c, e, d)
(d, b, e, c)	(d, e, c, b)	(c, e, b, d)
(e, b, d, c)	(e, d, c, b)	(e, c, b, d)

2 人が自分のプレゼントを受け取る場合は，次の 3 通りである。

(d, b, c, e), (c, b, e, d), (b, e, c, d)

3 人が自分のプレゼントを受け取る場合は，(e, b, c, d) 1 通りである。4 人が自分のプレゼントを受け取る場合はない。従って，(i) の場合，A,B,C,D 4 人が全て他人のプレゼントを受け取る場合の数は，$24 - (9 + 3 + 1) = 11$ である。

(ii),(iii),(iv) の場合も，(i) と全く同じにして数えられるので，全て 11 通りである。以上より，A,B,C,D 4 人が全て他人のプレゼントを受け取る場合の数は $11 \times 4 + 9 = 53$ であり，その内初回で交換会が終了するのは，(i) から (iv) の場合なので，題意の条件付き確率は

$\dfrac{44}{44+9} = \dfrac{44}{53}$ である。

解説）独立試行の問題なので，考えやすい問題である。(1) は全ての場合を書き出すことができるのでやさしい。(i) はレベル４，(ii) はレベル３，(iii) はレベル 2.5 でしょう。(2) は問題文を読みながら自然に答えることができるので，レベル 2.5 でしょう。(3) は少し計算があるので，レベル２かな。(4) は場合分けがちょっと難しいので，レベル 1.5 でしょう。問題としては，よくある問題で，考えやすいし，まあ，いい問題ですかね。しかし，(4) はなくてもいいですね。(1) から (3) の中で，設問を増やせばいいと思います。

第４問. (1) $5^4 = 625$ を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。このことを用いると，不定方程式

$$5^4 x - 2^4 y = 1 \quad \cdots \quad ①$$

の整数解を求めることができる。x が正の整数で最小になる解，および x が 2 桁の正の整数で最小になる解を求めよ。

解答）式 $5^4 - 2^4 \times 39 = 1 \quad \cdots \quad ③$ が成り立つので，①−③ より，

$$5^4(x-1) - 2^4(y-39) = 0. \quad \cdots$$

これの一般解は整数 k を用いて $x - 1 = 2^4 k$, $y - 39 = 5^4 k$ より，$x = 1 + 16k$, $y = 5^4 k + 39$ となるので，x が正の整数で最小になる解は $k = 0$ のときで，$x = 1$, $y = 39$ である。

また，x が 2 桁の正の整数で最小になる解は $k = 1$ のときで，$x = 17$, $y = 664$ である。

(2) 625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りについて考える。以下の $\boxed{}$ にあてはまる答えを求めよ。

解答）まず，$625^2 = 5^8$ であり，$m = 39$ とすると，式③ を用いると，

$$625^2 = 2^8 m^2 + 2^5 m + 1 \quad \cdots \quad ④$$

である。これらより，625^2 を 5^5 で割ったときの余りと，2^5 で割ったときの余りが分る（0 と 1）。

(3) (2) の考察は，不定方程式

$$5^5 x - 2^5 y = 1 \quad \cdots \quad ②$$

の整数解を調べるために利用できる。x, y を②の整数解とすると，$5^5 x$ は 5^5 の倍数であり，2^5

で割ったときの余りは 1 となる。よって，(2) により，5^5x-625^2 は 5^5 でも 2^5 でも割り切れる。5^5 と 2^5 は互いに素なので，5^5x-625^2 は $5^5\cdot 2^5$ の倍数である。以下の $\boxed{}$ にあてはまる答えを求めよ。

解答）②の整数解のうち，x が 3 桁の正の整数で最小になる解を求めたい。(2) の④式は，

$625^2=2^5\times 12207+1 \quad \cdots$ ④　なので，②−④ より，

$$5^5x-625^2=2^5(y-12207) \quad\to\quad 5^5(x-5^3)=2^5(y-12207).$$

よって，②の一般解は，k を整数として，$x-5^3=2^5k,\ \ y-12207=5^5k.$ x が 3 桁の正の整数で最小になるのは，$k=0$ のときで，解は　$x=125,\ \ y=12207$　である。

(4) 11^4 を 2^4 で割ったときの余りは 1 に等しい。不定方程式

$$11^5x-2^5y=1 \qquad \cdots ⑤$$

の整数解のうち，x が正の整数で最小になる解を求めよ。

解答）まず，$11^4=2^4\times 915+1$ となることに注意しよう（易しくないよね！）。両辺に 11^2 を掛けると，

$$11^6=2^4\times 915\times 11^2+11^2=2^4\times 915(8\times 15+1)+8\times 15+1=2^3\times 221445+1 \quad \cdots ⑥$$

となる（こんな式も作れないよね！）。⑤−⑥ より，

$$11^5(x-11)-2^3(4y-221445)=0 \qquad \cdots ⑦$$

を得る。これの一般解は　$x-11=8k,\ \ 4y-221445=11^5k$（$k$ は整数）となる。x が正の整数で小さいものは，$k=-1$ のとき，$x=3$，$k=0$ のとき，$x=11$，$k=1$ のとき，$x=19$ であるが，前者の 2 つのとき，y は整数にならないので，解ではない。

$x=19$ のとき，$y=\dfrac{382496}{4}=95624$　となり，これが題意を満たす解である。

解説）この問題では，次の 2 つの結果を知っていて，よく使っていないと難しいでしょう。

［定理 A］ 2 つの整数 a,b が互いに素であるとき，$ax+by=1$ を満たす整数 x,y が存在する。

［定理 B］ 2 つの整数 a,b が互いに素であるとき，方程式　$ax+by=0$　の全ての整数解は

$$x=bk,\quad y=-ak \quad (k \text{ は整数})$$

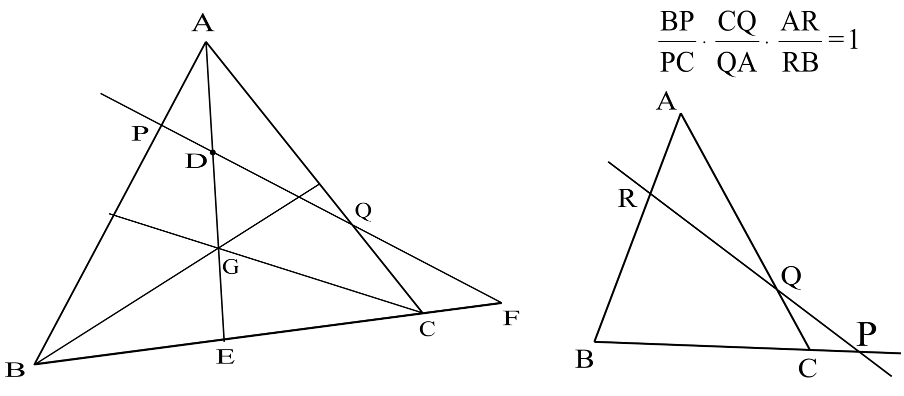
と表される。

これらの結果は，数学 A にあり，不定方程式 $ax+by=1$ の解法も扱っているので，範囲外の問題ではない。しかし，数が大きすぎて計算が大変だ。文系志望の学生には酷な問題だよ。

(1) は全員できて欲しい問題だね。しかし，レベル 2.5 くらいだね。(2) はやさしい計算でレベル 3 だね。(3) は，問題の説明文が長すぎるね（書かなくてもいいものがある）。計算は難しいのでレベル 1.5 かな。(4) は，めちゃくちゃ難しい問題（計算も大変）です。出しても意味がない問題だよ（ほとんど解けないという意味だよ）。理学部志望の学生に対する 2 次試験の問題なら許せるかな。レベル 1 です。整数論専門の数学者が，”自分の研究でよく使うすごく細かな難しい計算を問題にして出した”というようなもので，受験生の質を無視した設問と言えよう。

従って，第 4 問は (4) はカットして，最初にやさしい問題を 1 つ入れた方が，問題全体のバランスが良くなるね。

第５問． △ABC の重心を G とし，線分 AG 上で点 A とは異なる位置に点 D をとる。直線 AG と辺 BC の交点を E とする。また，直線 BC 上で辺 BC 上にはない位置に点 F をとる。直線 DF と辺 AB の交点を P，直線 DF と辺 AC の交点を Q とする（下の図５．(a) 参照)。



(a)　　図5　　(b)　メネラウスの定理

(1) 点 D は線分 AG の中点であるとする。以下の $\boxed{}$ にあてはまる答えを求めよ。

解答）点Gは重心なので，AG : GE= 2 : 1，そして AD=DG=GE にも注意せよ。このことから，$\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{1}{2}$　である。

さて，△ABE と △AEC に対してメネラウスの定理（図 5,(b) 参照；この定理の左辺の分数は全て分母と分子が逆になっていてもいいので注意すること）を使うと，

$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AD}{DE}\cdot\frac{EF}{FB}=1,\qquad \frac{ED}{DA}\cdot\frac{AQ}{QC}\cdot\frac{CF}{FE}=1 \qquad\cdots\ (\dagger)$$

となる。AD, DE は長さの比が分っているので，上の 2 式は次のように変形できる。

$$\frac{BP}{AP}=2\times\frac{BF}{EF},\quad\cdots\ ①\qquad \frac{CQ}{AQ}=2\times\frac{CF}{EF}.\quad\cdots\ ②$$

ここで，$a=\mathrm{BE}$, $b=\mathrm{CF}$ とおくと，$\mathrm{EC}=a$ だから，①, ② より，

$$\frac{BP}{PA}+\frac{CQ}{AQ}=2\left(\frac{BF+CF}{EF}\right)=2\left(\frac{2a+b+b}{a+b}\right)=2\times 2=4.\quad\cdots\ ③$$

(2) AB= 9，BC= 8，AC= 6 とし，(1) と同様に，点 D は線分 AG の中点であるとする。ここで，4 点 B, C, Q, P が同一円周上にあるように点 F をとる（図 6 参照)。以下の $\boxed{}$ にあてはまる答えを求めよ。

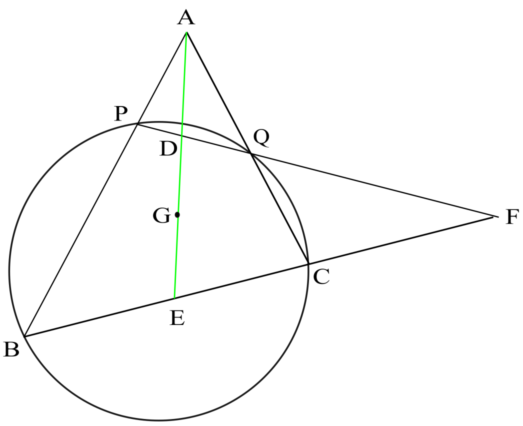


図6

解答）方べきの定理より，　AQ·AC=AP·AB　だから，

$$\mathrm{AQ}=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}\cdot\mathrm{AP}=\frac{9}{6}\mathrm{AP}=\frac{3}{2}\mathrm{AP}.$$

(1) の式③ より，

$$\frac{9-\mathrm{AP}}{\mathrm{AP}}+\frac{6-\mathrm{AQ}}{\mathrm{AQ}}=\frac{9-\mathrm{AP}}{\mathrm{AP}}+\frac{6-\frac{3}{2}\mathrm{AP}}{\frac{3}{2}\mathrm{AP}}=4.$$

$x=$AP とおくと，

$$\frac{9-x}{x}+\frac{6-\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x}=4 \quad\rightarrow\quad \left(\frac{9}{x}-1\right)+\left(\frac{4}{x}-1\right)=4 \quad\rightarrow\quad 6x=13 \quad\therefore\quad \mathrm{AP}=\frac{13}{6}.$$

このとき，AQ$=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{13}{6}=\dfrac{13}{4}$.

また，メネラウスの定理　$\dfrac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}=1$　より，$y=$FC とおくと，

$$\frac{8+y}{y}\cdot\frac{6-\frac{13}{4}}{\frac{13}{4}}\cdot\frac{\frac{13}{6}}{9-\frac{13}{6}}=1 \quad\rightarrow\quad \frac{8+y}{y}\cdot\frac{11}{41}=1 \quad\rightarrow\quad 30y=88 \quad\therefore\quad \mathrm{CF}=\frac{44}{15}.$$

(3) △ABC の形状や点 F の位置に関係なく，つねに　$\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=10$　となるのは，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DG}}$　がいくつのときか。

解答）(1) で使ったメネラウスの定理の公式 (†) より，

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}=\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{EF}},\qquad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FE}}$$

だから，$2a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CF}$　とおいて，上の 2 つの式の和を評価すると；

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AP}}+\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DA}}\left(\frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{EF}}+\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FE}}\right)=\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{2a+b+b}{a+b}=2\,\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{DA}}=10.$$

$\mathrm{AD}:\mathrm{DE}=1:5$　だから，　$\mathrm{AG}:\mathrm{GE}=4:2$　を考慮して，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DG}}=\dfrac{1}{3}$　を得る。

解説）メネラウスの定理を頻繁に使う問題は難しいよね。なぜならば，多くの受験生はメネラウスの定理の公式はしっかり覚えていないからです。この定理の公式は，なかなか覚えられないよね（私も，正確には覚えていない）。特に，理数系の学部を目指していない学生の多くは，使いこなせないと思った方が良いでしょう。だから，メネラウスの定理は，問題文の中に（参考までにという形で）書いた方がいいのです。そのようにしても，問題がやさしくなるということはありませんよ。ちょうどいい問題になるかな（？）。

(1) の最初の問はレベル 3 で，他はレベル 2 ですね（メネラウスの公式の変形は難しい）。(2) の方べきの定理を使う最初の問はレベル 2.5 だね。他はレベル 2 です。(3) はレベル 1 でしょう。

総評）「数学 I· 数学 A」を受験する学生は，文系志望の学生か，または理 · 工学部，医学部 · 薬学部以外の学部を志望している者が多いと思われます。そのような受験生にとってこの問題は，かなり難しい問題ですね。第 1 問，第 2 問は「数学 I」からの出題で，まあまあ点がとりやすい問題でした。選択問題は 3 問とも,「数学 A」からの出題で，けっこう難しい問題が最後の方に入っていました。私がレベル 1 とした問題の中には，カットして他のやさしい問題に替えた方がよかったものもあったよ。「数学 A」に偏り過ぎた感もあるね。

受験生の平均点が 37.96 だったのは，低い値であるが，以下の考察で予想できますね。また，世の中がコロナ禍で落ち着かず，学校も正常に開講されなかった影響もあり，受験生は十分な勉強ができなかったでしょう。受験に対して準備不足な者が多かったことも理由の 1 つでしょう。

各問の難易度別の得点を表にして見ましょう。

表４． 難易度別の配点

レベル	第１問 式の計算，三角比 円と三角形　I	第２問 ２次関数・方程式 必要条件，統計　I	第３問 独立試行 場合の数，確率　A	第４問 不定方程式 商と余り　A	第５問 メネラウスの定理 円と四角形　A
4〜3	21	7	5	2	2
2.5	9	11	2	7	2
2		8	10		13
1.5		4	3	6	
1				5	3
合計	30	30	20	20	20

この表を見ると，選択問題で第４問と第５問を選んだ学生は，大失敗ですね（難しかったよね）。第３問と第４問を選んだ場合，と，第３問と第５問を選んだ学生さんの得点は，私の大雑把な計算で次のようになるでしょう。

	＜第３問，第４問を選択＞	＜第３問，第５問を選択＞
レベル３までできると	35 点	35 点
レベル 2.5　〃	64 点	59 点
レベル２　〃	82 点	90 点
レベル 1.5　〃	95 点	97 点

平均点が 37.96 点だったと言うことは，平均点位しか取れなかった学生さんは，レベル３までの問はほぼ正解し，レベル 2.5 のものは２つ位しかできなかったという感じになります。レベル 2.5 とした問題は，ごく普通の問題で教科書のやや難しい例題程度だと思っていますが，これらがちょっと難しかったようです。受験生は，レベル 2.5 までの問題は全部正解してほしいですね。従って，合否判定に関って来るのはレベル２の問題がどの程度できるか否かということになります。レベル２以上の問題は，問題集のやや難しい問題をやったり，模擬試験などに挑戦することで，解き方のこつを身につけて下さい（経験は大切です）。数学は，学問の性格上，塾に行かなくても１人で十分に実力をつけることが可能です。挑戦せよ若者たち★。

（3 月 18 日 (金）’22 完，おとといのジョー）